Operații cu numere raționale

① Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{2010}{2}, \frac{2009}{3}, \frac{2008}{4}, \dots\right\}$
Determinați $A \cap \mathbb{N}$.

② Știind că $[a,b]+(a,b)=2a+3b$,
demonstrați că fracția $\frac{3a+14b}{3b+14a}$ este reductibilă.

③ Demonstrați că:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{2009}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2010}<1$$

④ Calculați suma $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots+\frac{1}{600}$

⑤ Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+n}=\frac{200}{101}.$$

⑥ Fie $A=\left\{\overline{abcd} \;/\; \frac{\overline{abcd}-\overline{abd}}{\overline{abc}}=d,\ a\neq 0\right\}$

a) Arătați că $2009 \in A$;

b) Calculați suma elementelor lui A.

⑦ Calculați $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{100}}$.

<u>Indicație</u>: Se înmulțește relația cu $\frac{1}{2}$ și apoi se scad cele două relații.

⑧ Calculați $S_1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^4}+\dots-\frac{1}{3^{2014}}$.

$$S_2=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{20}.$$

⑨ Arătați că $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{100^3}<2$.

⑩ Calculați $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$.