Model de teză

Clasa a XII-a, Semestrul I

I

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$. Calculați σ^{2014}.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Calculați $A \cdot {}^tA$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $A^2 + A = O_2$ și deduceți A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & x+2 & 3 \\ 1 & 1 & x+5 \end{vmatrix} = 0$

5. Fie $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. a) Calculați Δ în două moduri și deduceți formula:
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
b) Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Delta = 0$ și $a+b+c \neq 0$, atunci $a = b = c$.

II

1. Calculați limitele șirurilor:

a) $a_n = \dfrac{\sin n + \sin 3n}{n+1}$; b) $a_n = 2 + (-1)^n$

c) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \dots + \dfrac{n}{n^2+n}$; d) $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

e) $a_n = \sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+2n+5}$; f) $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{\sqrt{9n^2-n+1}}\right)^{n+2}$

2. Folosind teorema lui Weierstrass, studiați convergența șirurilor:

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dots + \dfrac{1}{n^3}$; $n \geq 1$

b) $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \geq 1$ și $a_1 = \dfrac{1}{3}$

c) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{7}{a_n}\right)$, $\forall n \geq 1$ și $a_1 = 2$.

În caz de convergență, determinați limita.